Jürgen Pöschel

LEHRBUCH

Etwas mehr Analysis

Eine Einführung in die mehrdimensionale Analysis

Springer Spektrum

Etwas mehr Analysis

Jürgen Pöschel

Etwas mehr Analysis

Eine Einführung in die mehrdimensionale Analysis

Springer Spektrum

Jürgen Pöschel
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart
Stuttgart, Deutschland

ISBN 978-3-658-05859-3 ISBN 978-3-658-05860-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-05860-9

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Für

Amiskwia
Sima
Muriel

Vorwort

Nach den Grundlagen der eindimensionalen Analysis im Band *Etwas Analysis* geht es nun um den Einstieg in die mehrdimensionale Analysis. Das Ziel ist wieder, das Wesentliche möglichst klar und einfach zu beschreiben und die Notation überschaubar zu halten, auch wenn sie notgedrungen etwas komplexere Gestalt annimmt.

Einen sanften Einstieg bilden Kurven, also stetige Abbildungen eines eindimensionalen Intervalls in einen Raum beliebiger Dimension. Dabei geht es vor allem um die Kategorien der stetigen, differenzierbaren sowie rektifizierbaren Kurven. Die Identifikation verschiedener Kurven über stetige Parametertransformationen führt zum Begriff des Weges und damit zu einem ersten Kontakt mit der Idee der Mannigfaltigkeit, auch wenn das hier nicht so ausgesprochen wird.

Die mehrdimensionale Differenziation und Analysis stehen im Mittelpunkt der nächsten beiden Kapitel. Die von nun an unverzichtbare lineare Algebra repetieren wir kurz, doch machen wir keinen Versuch, einen gründlichen Kurs zu ersetzen.

Eine zentrale Stellung nimmt der Umkehrsatz ein, ohne Zweifel einer der wichtigsten Sätze der Analysis. Wir beweisen ihn zuerst detailliert in der Kategorie lipschitzstetiger Abbildungen mit dem Banachschen Fixpunktsatz. Dieser Beweis funktioniert tatsächlich in beliebigen Banachräumen. Differenzierbarkeit ist dann lediglich ein Regularitätsargument in der Art, wie man es ohnehin öfter braucht.

Der Implizite-Funktionen-Satz schließt sich in klassischer Weise an und führt zur Betrachtung regulärer Werte und eingebetteter Mannigfaltigkeiten. Diese sind auch der natürliche Ort für Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen.

Das vierte Kapitel greift das Thema der Kurven in Gestalt des Wegintegrals wieder auf. Nur in dieser Form taucht das Integral in diesem Band übrigens auf, und dafür ist das im ersten Band entwickelte Cauchyintegral völlig ausreichend. Die Differenzialformen haben hier ihren ersten Auftritt in Gestalt der Pfaffschen oder 1-Formen. Geschlossene und exakte 1-Formen werden studiert bis hin zum klassischen Satz, dass auf einfach zusammenhängenden Gebieten jede lokal exakte 1-Form eine Stammfunktion besitzt.

Die letzten vier Kapitel greifen das Thema der Kurven in nochmals anderer Form auf, und zwar als Integralkurven gewöhnlicher Differenzialgleichungen und Vektorfelder. Die Studierenden erhalten hier einen ersten Einblick in das schöne Gebiet der dynamischen Systeme.

Den Anfang bildet die Theorie der linearen Differenzialgleichungen, die noch nicht die allgemeinen Existenzsätze benötigen. Unter anderem wird die Geometrie zweidimensionaler linearer Differenzialgleichungen ausführlich diskutiert wie auch von reellen Systemen mit rein imaginaren Eigenwerten, die zum Studium linearer Strömungen auf Torusflächen führen.

Das nächste Kapitel behandelt allgemeine nichtlineare gewöhnliche Differenzialgleichungen erster Ordnung, sprich Vektorfelder, und deren Flüsse. Um lästige Komplikationen mit deren Definitionsbereichen zu umgehen, setzen wir diese zunächst auf den Gesamtraum fort – in der Kategorie lipschitzstetiger Vektorfelder ist dies unkompliziert. Der allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitssatz wird dann global formuliert, einschließlich der stetigen Abhängigkeit von den Anfangswerten unter Verwendung gewichteter Normen. Den Abschluss bildet der Rektifizierungssatz lokal um reguläre Punkte – der einfachste Satz in der Klassifizierung von Vektorfelder.

Die letzten beiden Kapitel geben einen kleinen Einblick in die lokale Stabilitätstheorie von Gleichgewichtspunkten und periodischen Lösungen sowie die Idee der Normalform. Hier beweisen wir die klassischen Sätze von Lyapunov und von Hartman-Grobman für Attraktoren, den Fortsetzungssatz von Poincaré für periodische Lösungen und den Satz von Floquet über die Existenz einer konstanten Form der Variationsgleichungen entlang einer periodischen Lösung.

Zu allen Kapiteln gibt es wieder zahlreiche Aufgaben, und die Leserin und der Leser sollten weiterhin versuchen, so viele wie möglich zu bearbeiten. Lösungen gibt es auf der Webseite des ersten Bandes, `www.etwas-analysis.de`.

Zum Umfang Der Umfang von *Etwas Analysis* und *Etwas Mehr Analysis* geht sicher über das hinaus, was in einer zweisemestrigen Vorlesung vermittelt werden kann. Das Wesentliche des ersten sowie die ersten sechs Kapitel dieses Bandes können dagegen durchaus in zwei Semestern bewältigt werden. So bleibt im dritten Semester Zeit für das Lebesgueintegral, die Integration auf Mannigfaltigkeiten, die Vektoranalysis und einiges andere, was im dritten Band *Noch Mehr Analysis* behandelt wird.

Zur Notation Ein Verweis wie $_{1.9.23}$ bezieht sich auf den ersten Band *Etwas Analysis*.

Zum Schluss Auch hier gebührt mein erneuter Dank Ulrike Schmickler-Hirzebruch für die effiziente und erfreuliche Zusammenarbeit mit dem Springer-Verlag.

Nagold, den 31. März 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Kurven und Wege

1.1 Kurven 2
1.2 Differenzierbare Kurven 6
1.3 Rektifizierbare Kurven 12
1.4 Wege 17
1.5 Ergänzungen 21
Aufgaben 24

2 Mehrdimensionale Differenziation

2.1 Elemente der Linearen Algebra 28
2.2 Totale Ableitung 34
2.3 Richtungsableitungen 41
2.4 Das Lemma von Hadamard 48
2.5 Gradient 50
2.6 Höhere Ableitungen 54
Aufgaben 59

3 Mehrdimensionale Analysis

3.1 Die Taylorsche Formel 64
3.2 Lokale Extrema 71
3.3 Konvexe Mengen und Funktionen 83
3.4 Umkehrabbildungen 90
3.5 Implizite Funktionen 105
3.6 Mannigfaltigkeiten 116
3.7 Extrema mit Nebenbedingungen 124
Aufgaben 129

4 Wegintegrale

4.1 Pfaffsche Formen 134
4.2 Kurven- und Wegintegrale 136
4.3 Wegintegrale exakter 1-Formen 142
4.4 Lokal exakte 1-Formen 148
4.5 Global exakte 1-Formen 151
Aufgaben 157

5 Lineare Differenzialgleichungen

5.1 Exponenziale linearer Operatoren 160
5.2 Die lineare Differenzialgleichung 165
5.3 Zweidimensionale lineare Systeme 170
5.4 Diagonalisierbare Gleichungen 181
5.5 Allgemeine Gleichungen 187
5.6 Rein imaginäre Eigenwerte 191
Aufgaben 199

6 Gewöhnliche Differenzialgleichungen

6.1 Vektorfelder und Differenzialgleichungen 204
6.2 Einige Hilfssätze 208
6.3 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz 212
6.4 Flüsse 217
6.5 Maximale Flüsse 223
6.6 Konjugation von Vektorfeldern und Flüssen 225
Aufgaben 231

7 Gleichgewichtspunkte

7.1 Stabilität 236
7.2 Die Sätze von Lyapunov 240
7.3 Lyapunovfunktionen 248
7.4 Hyperbolische Gleichgewichtspunkte 252
Aufgaben 258

8 Periodische Bahnen

8.1 Poincaréabbildungen 262
8.2 Periodische Attraktoren 269
8.3 Ein Fortsetzungssatz 272
8.4 Floquettheorie 276
Aufgaben 282

Literatur 285
Index 286
Bezeichnungen 291

1

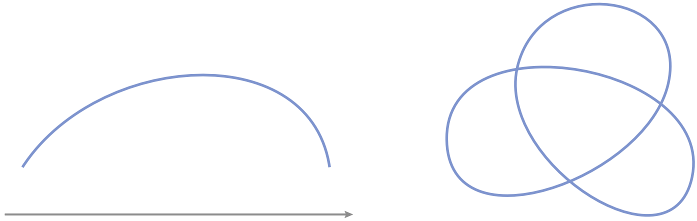
Kurven und Wege

Bisher kennen wir Kurven vor allem als Graphen reellwertiger Funktionen. Schreibt man aber eine Koordinate als Funktion einer anderen Koordinate, so sind die Darstellungsmöglichkeiten begrenzt. So lässt sich bereits der Einheitskreis nicht als Graph einer einzigen Funktion darstellen.

Wesentlich flexibler sind *parametrisierte Kurven*. Hier werden *alle* Koordinaten der Kurvenpunkte als Funktionen eines unabhängigen reellen *Parameters* dargestellt. Interpretieren wir diesen Parameter als Zeit, so können wir uns eine parametrisierte Kurve vorstellen als Reiseplan eines Punktes, der zu jedem Zeitpunkt angibt, an welchem Raumpunkt er sich befindet. Auf diese Weise lassen sich auch geschlossene oder mehrfach durchlaufene Kurven einfach beschreiben.

Parametrisierte Kurven bilden den ersten Schritt in Richtung der mehrdimensionalen Differenzialrechnung. Dabei können wir auch gleich Kurven in einem beliebigen Banachraum betrachten, denn eine Beschränkung auf endlich dimensionale Räume vereinfacht die Diskussion in keiner Weise.

Abb 1 **Graph und Kurve**



J. Pöschel, *Etwas mehr Analysis*, DOI 10.1007/978-3-658-05860-9_1,

1.1 Kurven

Definition *Eine parametrisierte Kurve oder kurz Kurve in einem Banachraum E ist eine stetige Abbildung $\gamma \colon I \to E$ eines kompakten, nichtleeren Intervalls I in den Raum E. Ihr Bild, die Menge*

$$\gamma(I) := \{\gamma(t) : t \in I\} \subset E,$$

heißt die Spur der Kurve γ in E. ⋊

Eine *Kurve* γ ist demnach ein Element des Raumes $C(I, E)$ aller stetigen Abbildungen von I nach E. Durchläuft t das Intervall $I = [a, b]$ von a nach b, so durchläuft der Punkt $\gamma(t)$ die Spur $\gamma(I)$ der Kurve von ihrem *Anfangspunkt* $\gamma(a)$ zu ihrem *Endpunkt* $\gamma(b)$.

Umgekehrt bezeichnet man die Abbildung γ als *Parametrisierung* ihrer Spur. Offensichtlich erlaubt jede Spur unendlich viele verschiedene Parametrisierungen, da sie als reine Punktmenge keine Information über den Verlauf ihrer Parametrisierung enthält.

Bemerkung In der Literatur wird allerdings auch die Spur gerne als Kurve bezeichnet, was auch dem allgemeinen Sprachgebrauch näher kommt. Im Bereich der Kurven ist die Terminologie überhaupt recht uneinheitlich. ⊸

Definition *Eine Kurve $\gamma \colon [a, b] \to E$ heißt geschlossen, wenn ihr Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen, also $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt. Sie heißt einfach oder doppelpunktfrei, wenn sie auf $[a, b)$ und $(a, b]$ injektiv ist.* ⋊

Eine geschlossene Kurve ist also doppelpunktfrei, wenn Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen, aber alle anderen Punkte ihrer Spur genau einmal durchlaufen werden. Der *Spur* allein sieht man allerdings nicht an, ob sie doppelpunktfrei ist oder nicht, da sie auch mehrfach durchlaufen sein kann.

Abb 2

Kurve in der Ebene

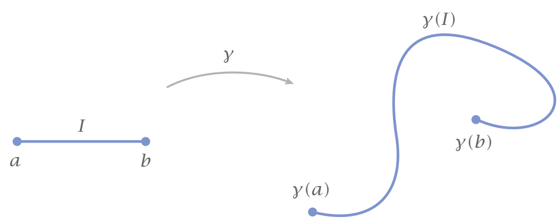
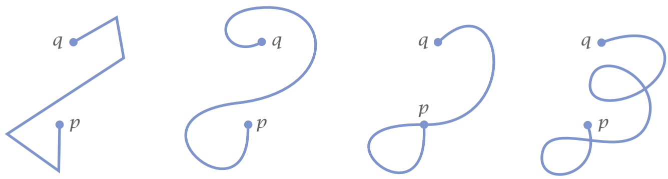


Abb 3 Nichtgeschlossene Kurven



A. Jeder Punkt $p \in E$ ist die Spur einer *konstanten Kurve*

$$\gamma : I \to E, \quad \gamma(t) \equiv p.$$

Diese ist geschlossen, aber nicht doppelpunktfrei, falls $|I| > 0$.

B. Die *Strecke* mit Anfangspunkt p und Endpunkt q ist die Spur der Kurve

$$\gamma : [0,1] \to E, \quad \gamma(t) = (1-t)p + tq.$$

Für $p \neq q$ ist diese Kurve doppelpunktfrei und nicht geschlossen. Für $p = q$ ist die Kurve konstant, geschlossen, aber nicht doppelpunktfrei.

C. Der Graph einer Funktion $f \in C(I)$ wird durch die Kurve

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, f(t))$$

parametrisiert. Diese ist immer doppelpunktfrei und nicht geschlossen.

D. Der Einheitskreis in der Ebene ist die Spur der geschlossenen, doppelpunktfreien Kurve

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

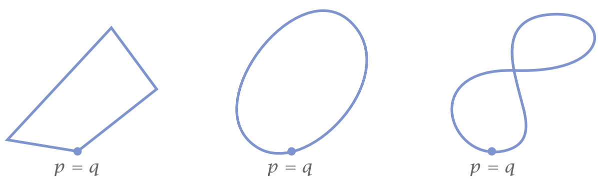
Der n-*mal* durchlaufene Einheitskreis wird durch

$$\gamma : [0, 2\pi n] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t),$$

mit $n \geqslant 2$ parametrisiert. Er ist geschlossen, aber nicht doppelpunktfrei.

Abb 4

Geschlossene Kurven



Peano- und Jordankurven

Mit dem Begriff der Kurve als stetiger Abbildung eines Intervalls in einen Raum verbindet sich unwillkürlich die Anschauung einer Linie, die man ›ohne abzusetzen‹ von ihrem Anfangs- bis zu ihrem Endpunkt zeichnen kann. Man sollte meinen, ihre Stetigkeit verhindert ein allzu wildes Verhalten. Dem ist jedoch nicht so. Auf Peano geht zum Beispiel folgende Entdeckung zurück.

1 **Satz von Peano** *Es gibt Kurven* $\gamma\colon [0,1] \to [0,1]^2$, *die surjektiv sind.* ⋊

Es gibt also Kurven, genannt *Peanokurven*, die ein Quadrat vollständig überdecken. Das stetige Bild einer *eindimensionalen* Menge kann somit *zweidimensional* sein.

⟪⟪ *Beweisskizze* Die folgende Konstruktion geht auf Hilbert [1] zurück. Dabei wird induktiv eine Folge von Kurven $\gamma_n\colon [0,1] \to [0,1]^2$ wie in Abbildung 5 konstruiert. Die Kurve γ_n bildet dabei jedes Teilintervall des in 4^n gleichlange Teile zerlegten Einheitsintervalls $[0,1]$ in genau eines der 4^n gleichgroßen Teilquadrate von $[0,1]^2$ mit Kantenlänge 2^{-n} ab. Beim Übergang von γ_n zu γ_{n+1} wird dabei in jedem dieser Quadrate der Verlauf so verändert, dass jedes Viertel dieses Quadrates in der in Abbildung 5 ersichtlichen Weise durchlaufen wird. Somit gilt auf jeden Fall

$$\|\gamma_n - \gamma_{n+1}\|_{[0,1]} = \max_{t\in[0,1]} \|\gamma_n(t) - \gamma_{n+1}(t)\|_E \leqslant \frac{2}{2^n}$$

für alle $n \geqslant 1$. Für alle $m > n$ gilt somit auch

$$\|\gamma_n - \gamma_m\|_{[0,1]} \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \|\gamma_k - \gamma_{k+1}\|_{[0,1]} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2}{2^n} = \frac{4}{2^n}.$$

[1] Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. *Math. Ann.* **38** (1891), 459–460.

Abb 5 **Konstruktion einer Peanokurve**

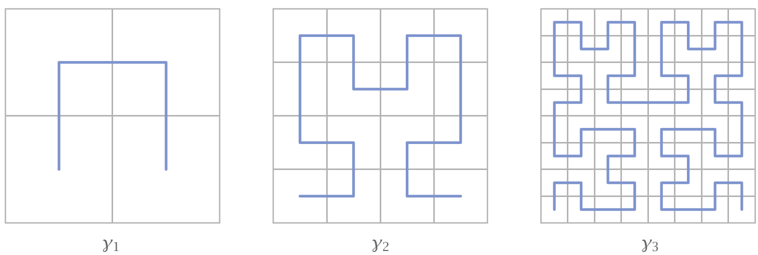
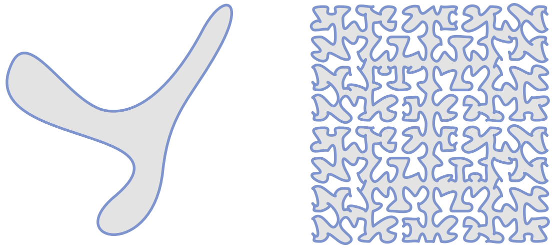


Abb 6

Zwei Jordankurven



Somit konvergieren die Kurven γ_n auf $[0,1]$ *gleichmäßig* gegen eine Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to [0,1]^2$, die aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz wiederum stetig ist, also eine Kurve darstellt $_{1.7.52}$.

Andererseits durchläuft jede Kurve γ_m mit $m \geqslant n$ jedes Teilquadrat der n-ten Teilung von $[0,1]^2$. Da die Feinheit dieser Teilung gegen Null strebt, liegt die Spur der Grenzkurve γ dicht in $[0,1]^2$. Als stetiges Bild der kompakten Menge $[0,1]$ ist sie aber auch kompakt $_{1.7.38}$. Also gilt $\gamma([0,1]) = [0,1]^2$.

Eine ›explizite‹ Darstellung einer Peanokurve wird in Aufgabe 18 gegeben.

Bei genauem Hinsehen stellt man fest, dass Peanokurven zwar surjektiv, aber nicht injektiv sind. Fordert man zusätzlich noch die Injektivität, so ergibt sich ein Bild, dass der Anschauung schon eher entspricht.

2 **Jordanscher Kurvensatz** *Ist Γ die Spur einer geschlossenen, doppelpunktfreien Kurve in der euklidischen Ebene, so besteht ihr Komplement aus genau zwei disjunkten und zusammenhängenden Komponenten, genannt das Innere und das Äußere der Kurve. Dabei ist das Innere beschränkt, das Äußere unbeschränkt, und der Rand beider Komponenten ist genau Γ.*

Geschlossene und doppelpunktfreie Kurven werden daher auch *Jordankurven* genannt. Der Satz scheint anschaulich klar, doch stellt sich heraus, dass der Beweis schwierig ist, wenn man beliebige *stetige* Kurven betrachtet. Tatsächlich ist es so, dass Jordankurven keineswegs ›schöne‹ Kurven sein müssen. Auch sie können eine Fläche mit positivem Inhalt ausfüllen. [2] — Stetige Kurven können also durchaus ›wild‹ sein. Wir werden deshalb vor allem differenzierbare Kurven betrachten.

[2] W.F. Osgood, A Jordan curve of positive area. *Trans. Am. Math. Soc.* **4** (1903), 107–112. R. Maehara, The Jordan Curve Theorem via the Brouwer Fixed Point Theorem. *Amer. Math. Monthly* **91** (1984), 641–643.

1.2

Differenzierbare Kurven

Wir wollen erklären, wann eine Kurve in einem Punkt differenzierbar ist. Wir gehen dabei wieder von der geometrischen Vorstellung aus, dass es in einem solchen Punkt eine eindeutige Gerade gibt – die *Tangente* – welche die Kurve besser als jede andere Gerade approximiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Approximationsfehler bei Annäherung an den Berührpunkt schneller als eine lineare Funktion gegen Null strebt.

Sei dazu nun $\gamma\colon I \to E$ eine Kurve mit einem nichtentarten Intervall I und a ein beliebiger Punkt in I. Eine *Gerade* α durch den Kurvenpunkt $\gamma(a)$ hat die Parameterdarstellung

$$\alpha(t) = \gamma(a) + v(t-a)$$

mit einem Vektor $v \in E$. Dabei lassen wir auch $v = 0$ zu. Deren Approximationsfehler zur Kurve γ an der Stelle t ist $\|\gamma(t) - \alpha(t)\|_E$, und für diesen fordern wir also

$$\lim_{t\to a} \frac{\|\gamma(t) - \alpha(t)\|_E}{|t-a|} = 0.$$

Wie im Fall reeller Funktionen einer Variablen ist dies höchstens für eine Wahl des Vektors v möglich$_{\text{A-3}}$. Das heißt, wenn es ein solches v gibt, so ist es eindeutig bestimmt.

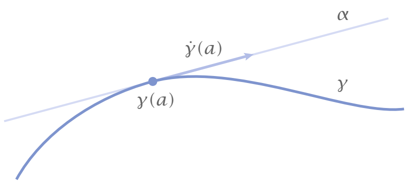
Definition *Sei I ein nichtentartetes Intervall. Eine Abbildung $\gamma\colon I \to E$ heißt differenzierbar im Punkt $a \in I$, wenn es einen Vektor $v \in E$ gibt, so dass*

$$\lim_{t\to a} \frac{\|\gamma(t) - \gamma(a) - v(t-a)\|_E}{|t-a|} = 0. \tag{1}$$

In diesem Fall heißt v die erste Ableitung von γ im Punkt a und wird mit $\dot\gamma(a)$ oder $\gamma'(a)$ bezeichnet. ⋊

Abb 7

Kurve mit Tangentialvektor und Tangente



Diese Differenzierbarkeit lässt sich wiederum mithilfe von Differenzenquotienten charakterisieren. Diese sind in einem Banachraum wohldefiniert, da es sich dabei um nichts anderes als Linearkombinationen handelt.

3 **Zweiter Differenzierbarkeitssatz** *Für eine Abbildung $\gamma \colon I \to E$ und einen Punkt $a \in I$ sind äquivalent:*

(i) *γ ist differenzierbar in a mit $\dot{\gamma}(a) = v$.*

(ii) *Es gibt einen Vektor $v \in E$ und eine im Punkt a stetige und verschwindende Abbildung $\varepsilon \colon I \to E$, so dass*

$$\gamma(t) = \gamma(a) + v(t-a) + \varepsilon(t)(t-a). \tag{2}$$

(iii) *Es existiert der Grenzwert*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\gamma(a+h) - \gamma(a)}{h} = \lim_{t \to a} \frac{\gamma(t) - \gamma(a)}{t-a} = v. \quad ⋊$$

(iv) *Es gilt*

$$\lim_{t \to a} \frac{\|\gamma(t) - \gamma(a) - v(t-a)\|_E}{|t-a|} = 0. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ (i) ⇔ (ii) Setzen wir

$$\varepsilon(t) = \frac{\gamma(t) - \gamma(a) - v(t-a)}{t-a}, \qquad t \neq a,$$

so ist ε wegen (1) stetig im Punkt a durch den Wert 0 fortsetzbar. Es gilt dann (2). Umgekehrt folgt aus (2) unmittelbar (1).

(ii) ⇔ (iii) Mit den Bezeichnungen von (2) ist

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(a)}{t-a} = v + \varepsilon(t), \qquad t \neq a.$$

Verschwindet ε stetig im Punkt a, so ist

$$v = \lim_{t \to a} (v + \varepsilon(t)) = \lim_{t \to a} \frac{\gamma(t) - \gamma(a)}{t-a}.$$

Existiert umgekehrt der Grenzwert auf der rechten Seite, so ist ε stetig fortsetzbar im Punkt a mit dem Wert 0, und es gilt (2). ⟩⟩⟩⟩⟩

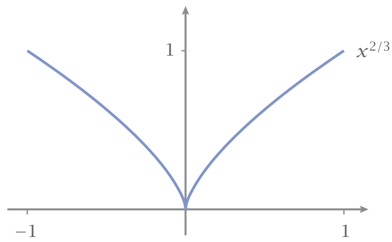
Der Vektor

$$v = \dot{\gamma}(a)$$

heißt *Tangential-* oder *Geschwindigkeitsvektor* der Kurve im Punkt $\gamma(a)$, seine Länge $\|\dot{\gamma}(a)\|_E$ ihre *(momentane) Geschwindigkeit*. Ist $\dot{\gamma}(a) \neq 0$, so ist die

Abb 8

Die gespiegelte Neilsche Parabel



Tangente an γ im Punkt $\gamma(a)$ gegeben durch die parametrisierte Gerade

$$\alpha(t) = \gamma(a) + \dot{\gamma}(a)t.$$

Ist dagegen $\dot{\gamma}(a) = 0$, so ist die Tangente nicht definiert. Die Kurve kann in diesem Fall eine Ecke oder Spitze bilden.

4 ⊳ *Neilsche Parabel* Die Kurve

$$\gamma: \ [-1, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t^3, t^2)$$

ist in jedem Punkt differenzierbar mit Ableitung und Geschwindigkeit

$$\dot{\gamma}(t) = (3t^2, 2t), \qquad \|\dot{\gamma}(t)\|_e = \sqrt{9t^4 + 4t^2},$$

hat aber im Nullpunkt eine Spitze. Es handelt sich um die an der Hauptdiagonalen gespiegelte *Neilsche Parabel* $x \mapsto x^{2/3}$ – siehe Abbildung 8. ⊲

Bemerkungen *a.* Beschreiben wir die Neilsche Parabel als *Graphen* der Funktion $x \mapsto x^{2/3}$, so ist diese Funktion im Punkt 0 *nicht* differenzierbar. Beschreiben wir sie jedoch wie im vorangehenden Beispiel als *parametrisierte Kurve*, so ist diese Parametrisierung überall differenzierbar, auch wenn der Tangentialvektor an einer Stelle verschwindet. Letzteres ist unvermeidlich, da die Parabel dort eine Spitze ausbildet.

b. Der Graph einer *differenzierbaren* Funktion besitzt dagegen in jedem Punkt eine Tangente A-4. ⊸

Definition *Eine Kurve $\gamma: I \to E$ heißt differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt von I differenzierbar ist. In diesem Fall heißt*

$$\dot{\gamma}: \ I \to E, \quad t \mapsto \dot{\gamma}(t)$$

die Ableitung von γ. Ist $\dot{\gamma}$ außerdem stetig, so heißt γ stetig differenzierbar oder C^1. ⋊

Die Ableitung einer C^1-Kurve ist somit wieder eine Kurve. Induktiv können wir daher wie bei den reellwertigen Funktionen die Klassen

$$C^r(I,E), \qquad 0 \leqslant r \leqslant \infty,$$

aller r-mal stetig differenzierbaren Kurven $I \to E$ definieren. Dabei steht $C^0(I,E)$ für $C(I,E)$. — Wir notieren die beiden wichtigsten Rechenregeln.

5 **Satz** *Seien $\gamma,\eta \in C^r(I,E)$. Für $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ist dann auch $\alpha\gamma+\beta\eta \in C^r(I,E)$, und es gilt*

$$(\alpha\gamma+\beta\eta)^{\cdot} = \alpha\dot{\gamma}+\beta\dot{\eta}.$$

Ist außerdem $\varphi\colon J \to I$ eine C^r-Abbildung, so ist $\gamma\circ\varphi \in C^r(J,E)$ und

$$(\gamma\circ\varphi)^{\cdot} = (\dot{\gamma}\circ\varphi)\dot{\varphi}. \qquad \rtimes$$

Die Beweise verlaufen analog zu denen in Abschnitt 1.9.1 und sind als Übung überlassen. Beide Aussagen sind übrigens Spezialfälle allgemeinerer Sätze für höherdimensionale Abbildungen, die im nächsten Kapitel bewiesen werden.

▪ Kurven im $\mathbb{R}^m$

Natürlich betrachten wir vor allem Kurven in einem endlich dimensionalen Raum wie den $\mathbb{R}^m$ [3]. Solche Kurven werden durch m Komponentenfunktionen beschrieben, die wir aus Platzgründen meist als Zeilenvektor

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t),..,\gamma_m(t))$$

darstellen. Die Kurve γ ist stetig genau dann, wenn jede Komponente γ_i stetig ist $_{1.5.39}$. Betrachten wir die diesbezüglichen Differenzenquotienten, so gilt Entsprechendes auch für die Differenzierbarkeit $_3$.

6 **Satz** *Eine Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^m$ ist im Punkt $a \in I$ differenzierbar genau dann, wenn jede Komponentenfunktion in a differenzierbar ist, und es gilt*

$$\dot{\gamma}(a) = (\dot{\gamma}_1(a),..,\dot{\gamma}_m(a)).$$

Die Kurve γ ist C^r, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, genau dann, wenn jede Komponentenfunktion C^r ist. $\rtimes$

[3] Ab dem nächsten Kapitel hat der Urbildraum standardmäßig die Dimension n und der Zielraum die Dimension m. Daher schreiben wir auch hier m.

7 ⊳▸ A. Die Standardparametrisierung des Einheitskreises,

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t),$$

ist eine C^∞-Kurve mit Ableitung und Geschwindigkeit

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t), \qquad \|\dot{\gamma}(t)\|_e = 1.$$

B. Die übliche Parametrisierung des Graphen einer C^r-Funktion $f : I \to \mathbb{R}$,

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, f(t)),$$

ist C^r und hat Ableitung und Geschwindigkeit

$$\dot{\gamma}(t) = (1, f'(t)), \qquad \|\dot{\gamma}(t)\|_e = \sqrt{1 + (f')^2(t)} > 0. \quad ◂⊲$$

▪ Der Hauptsatz

Die Ableitung einer stetig differenzierbaren Kurve ist wieder eine Kurve. Wie bei den reellen Funktionen können wir daher die Frage stellen, ob umgekehrt jede Kurve die Ableitung einer anderen Kurve ist. In der Tat gilt der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung $_{1.9.23}$ auch hier. Wir müssen nur das Integral im $\mathbb{R}^m$ beziehungsweise dem Banachraum E bilden, wie in Abschnitt 1.8.5 beschrieben. Diesen Integral benötigen wir später ohnehin für die Integration von 1-Formen entlang Kurven.

8 **Stammfunktionensatz** *Sei $\gamma \in C(I, E)$ und $c \in I$ beliebig. Dann definiert*

$$\Phi(t) \coloneqq \int_c^t \gamma$$

eine Stammfunktion $\Phi \in C^1(I, E)$ zu γ. Das heißt, es gilt $\dot{\Phi} = \gamma$ auf I. ⋊

⟪⟪ Jede stetige Kurve $\gamma : I \to E$ ist integrierbar. Die Abbildung Φ ist daher für jedes $t \in I$ definiert. Aus der Additivität des Integrals folgt

$$\Phi(t + h) = \int_c^t \gamma + \int_t^{t+h} \gamma = \Phi(t) + \left[\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \gamma \right] h.$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern besitzt aufgrund des Riemannschen Lemmas $_{1.8.14}$ für $h \to 0$ den Grenzwert $\gamma(t)$. Somit ist Φ im Punkt t differenzierbar, und es ist $\dot{\Phi}(t) = \gamma(t)$. Da dies in jedem Punkt $t \in I$ gilt, ist Φ eine Stammfunktion von γ. ⟫⟫

▷▶ Eine Kurve γ im $\mathbb{R}^m$ wird natürlich komponentenweise integriert, und eine Stammfunktion besteht aus den Stammfunktionen der Komponenten von γ. Ist also zum Beispiel

$$\gamma(t) = (2t, 3t^2, 4t^3),$$

so ist eine Stammfunktion gegeben durch

$$\Phi(t) = \int_0^t (2s, 3s^2, 4s^3)\,\mathrm{d}s = (t^2, t^3, t^4). \qquad ◀◁$$

9 **Lemma** *Zwei verschiedene Stammfunktionen einer Kurve $\gamma \in C(I, E)$ unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante in E.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Betrachten wir zwei beliebige Stammfunktionen einer Kurve γ, so ist deren Differenz eine stetig differenzierbare Kurve mit überall verschwindender Ableitung. Es genügt daher zu zeigen, dass eine solche Kurve konstant ist.

Sei also $\varphi : I \to E$ eine C^1-Kurve mit $\dot{\varphi} = 0$. Angenommen, es gibt zwei Punkte $u, v \in I$ mit $\varphi(u) \neq \varphi(v)$. Dann gibt es auch ein lineares Funktional $L \in E^*$ mit $L\varphi(u) \neq L\varphi(v)$. Im $\mathbb{R}^m$ ist dies leicht einzusehen, indem man L als Skalarprodukt mit einem geeignet gewählten festen Vektor wählt [4]. In einem beliebigen Banachraum ist dies eine Konsequenz des Satz von Hahn-Banach. Damit gilt dann aber

$$L\varphi(v) - L\varphi(u) = \int_u^v (L\varphi)^{\cdot} = \int_u^v L\dot{\varphi} = 0,$$

und wir erhalten einen Widerspruch. ⟩⟩⟩⟩

Damit gilt auch der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung 1.9.23 ebenso für Kurven.

10 **Hauptsatz** *Sei $\gamma \in C(I, E)$. Für jede Stammfunktion Γ von γ und jedes Intervall $[a, b] \subset I$ gilt dann*

$$\int_a^b \gamma = \Gamma \Big|_a^b = \Gamma(b) - \Gamma(a).$$

Für jede C^1-Kurve γ gilt insbesondere

$$\int_a^b \dot{\gamma} = \gamma(b) - \gamma(a). \qquad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨ Der Beweis verläuft wie im klassischen eindimensionalen Fall 1.9.23. Die Funktion Φ des Stammfunktionensatzes 8 mit der Wahl $c = a$ ist eine

[4] Siehe dazu auch Abschnitt 2.1.