

Harro Heuser

Lehrbuch der Analysis

Teil 1

14. Auflage



Teubner

Harro Heuser

Lehrbuch Analysis

Teil 1

14., durchgesehene Auflage

Mit 127 Abbildungen, 810 Aufgaben,
zum Teil mit Lösungen



Teubner

B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme
Ein Titeldatensatz für diese Publikation ist bei
der Deutschen Bibliothek erhältlich.

1. Auflage 1980
13. Auflage 2000
14., durchges. Auflage Dezember 2001

Alle Rechte vorbehalten
© B. G. Teubner GmbH, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 2001

Der Verlag Teubner ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe BertelsmannSpringer.



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

www.teubner.de

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de
Druck und buchbinderische Verarbeitung: Lengericher Handelsdruckerei, Lengerich/Westfalen
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 3-519-52233-0

Für Isabella und Anabel, Marcus und Marius.

Hierdurch wird klar, weshalb Arithmetik und Geometrie mit weit größerer Sicherheit vor allen übrigen Wissenszweigen bestehen: weil nämlich sie allein sich mit einem so reinen und einfachen Gegenstand beschäftigen, daß sie gar nichts voraussetzen, was die Erfahrung unsicher zu machen imstande wäre, sondern gänzlich in verstandesmäßig abzuleitenden Folgerungen bestehen. Sie sind daher am leichtesten und durchsichtigsten von allen und haben einen Gegenstand, so wie wir ihn fordern, da hierbei der Irrtum, von Unaufmerksamkeit abgesehen, wohl kaum Menschenlos sein dürfte. Trotzdem darf es nicht in Verwunderung setzen, wenn sich der Geist vieler aus freien Stücken eher anderen Studien oder der Philosophie zuwendet: es kommt das nämlich daher, daß ja ein jeder es sich kecker herausnimmt, bei einem dunkeln, als bei einem klaren Gegenstand Vermutungen aufzustellen, und es weit leichter ist, bei einer beliebigen Frage irgend etwas zu mutmaßen, als bei einer noch so leichten bis zur Wahrheit selbst vorzudringen.

René Descartes, „Regeln zur Leitung des Geistes“.

Vorwort

Dieses Buch ist der erste Teil eines zweibändigen Werkes über Analysis. Es ist aus Vorlesungen, Übungen und Seminaren erwachsen, die ich mehrfach an den Universitäten Mainz und Karlsruhe gehalten habe, und so angelegt, daß es auch zum Selbststudium dienen kann.

Ich widerstehe der Versuchung, dem Studenten, der jetzt dieses Vorwort liest, ausführlich die Themen zu beschreiben, die ihn erwarten; denn dazu müßte ich Worte gebrauchen, die er doch erst *nach* der Lektüre des Buches verstehen kann—*nach* der Lektüre aber sollte er selbst wissen, was gespielt worden ist. Den Kenner hingegen wird ein Blick auf das Inhaltsverzeichnis und ein rasches Durchblättern ausreichend orientieren.

Dennoch halte ich es für möglich, anknüpfend an Schulkenntnisse und Alltagserfahrung auch dem Anfänger verständlich zu machen, was der rote Faden ist, der dieses Buch durchzieht und in welchem Geist es geschrieben wurde und gelesen werden möchte.

Der rote Faden, das ständig aufklingende Leitmotiv und energisch vorwärtstreibende Hauptproblem ist die Frage, *wie man das Änderungsverhalten einer Funktion verstehen, beschreiben und beherrschen kann*, schärfer: Welche Begriffe eignen sich am besten dazu, die Änderung einer Funktion „im Kleinen“ (also bei geringen Änderungen ihrer unabhängigen Variablen) zu erfassen, was kann man über die Funktion „im Großen“, über ihren Gesamtverlauf sagen, wenn man Kenntnisse über ihr Verhalten „im Kleinen“ hat, geben uns diese Kenntnisse vielleicht sogar die Funktion gänzlich in die Hand oder besser: Wie tief müssen diese „lokalen Kenntnisse“ gehen, um uns die Funktion „global“ vollständig auszuliefern. Um ein sehr alltägliches Beispiel zu nennen: Wenn ein Körper sich bewegt, so glauben wir intuitiv zu wissen, daß er in jedem Zeitpunkt eine wohlbestimmte „Momentangeschwindigkeit“ besitzt, daß diese uns Auskünfte über die Änderung seiner Lage „im Kleinen“ (innerhalb kurzer Zeitspannen) gibt und daß wir seinen Bewegungsverlauf „im Großen“, konkreter: die seit Beginn der Bewegung von ihm zurückgelegte Strecke, vollständig rekonstruieren können, wenn wir ebendiese Momentangeschwindigkeit in jedem Zeitpunkt kennen. Ist der Körper etwa ein Automobil, so wird uns seine Momentangeschwindigkeit durch den Tachometer und sein Bewegungsverlauf (die zurückgelegte Strecke) durch den Kilometerzähler geliefert. Aber diese nützlichen Instrumente sagen uns natürlich nicht, was denn *begrifflich* die

Momentangeschwindigkeit sei und wie man *systematisch* aus einem bekannten Geschwindigkeitsverlauf den Bewegungsverlauf zurückgewinnen könne — sie setzen ganz im Gegenteil die vorgängige theoretische Besinnung über derartige Begriffe und Verfahren schon voraus.

Als das mächtige und unverzichtbare Hilfsmittel für jede in die Tiefe dringende Untersuchung solcher Fragen wird sich der Begriff des *Grenzwerts* in seinen vielfältigen Formen und Abwandlungen erweisen. Er ist das Herzstück und der Kraftquell der Analysis und wird ab dem Kapitel III gleichsam der ewig jugendliche Held des analytischen Dramas sein.

Das Studium funktionellen Änderungsverhaltens ist nicht die müßige Träumerei weltfremder Gehirne in elfenbeinernen Türmen — es wird uns ganz im Gegenteil aufgedrängt durch das tief im Menschen wurzelnde Bestreben, die uns umgebende Welt zu verstehen und aus diesem Verstehen heraus zu gestalten. Ganz folgerichtig hebt es an und geht Hand in Hand mit der Schaffung der neuzeitlichen Physik unter den Händen von Newton, Euler, Lagrange und Laplace (um nur die Großen des stürmischen Anfangs zu nennen). Es hat im engsten Bunde mit den Naturwissenschaften — von ihnen befruchtet und ihnen die Früchte zurückgebend — unsere Welt in den letzten dreihundert Jahren so tiefgreifend umgestaltet, daß die Wirkungen der großen politischen Revolutionen demgegenüber verblassen und eher oberflächlich und peripher anmuten. Wer von der Weltfremdheit der Mathematik spricht, dem muß die moderne Welt wahrlich sehr fremd geworden sein.

Damit komme ich auf den Geist zu sprechen, in dem dieses Buch geschrieben wurde. Es versteht sich heutzutage von selbst, daß jede Darstellung der Analysis gemäß der axiomatischen Methode zu erfolgen hat: *Der ganze Bestand analytischer Aussagen muß streng deduktiv aus einigen Grundeigenschaften reeller Zahlen entfaltet werden.* Jede mathematische Disziplin verdankt ihre Sicherheit, ihre Überzeugungskraft und ihre Schönheit dieser Methode. Zu sehen, wie der reiche Teppich der Analysis mit seinen unendlich mannigfaltigen Farben und Figuren aus wenigen Fäden (den Axiomen über reelle Zahlen) enger und enger geknüpft wird — das ist eine geistige Erfahrung höchsten Ranges, um die kein Student betrogen werden darf. Aber gleichzeitig lag mir noch ein anderes am Herzen: Ich wollte zeigen, *mit welcher fast unbegreiflichen Kraft diese aus dem Geist gesponnene, in sich selbst ruhende „reine“ Theorie auf die „reale“ Welt wirkt* — dies zu sehen ist ebenfalls eine geistige Erfahrung, um die man niemanden bringen sollte. Das Staunen darüber, daß und wie ein „reines Denken“ die Wirklichkeit verstehen und gesetzmäßig ordnen kann, hat keinen Geringeren als Immanuel Kant dazu getrieben, seine gewaltige „Kritik der reinen Vernunft“ zu schreiben. Es bedarf keines Wortes, daß ich die „praktischen“ Auswirkungen der Theorie nur exemplarisch, nur an wenigen Beispielen zeigen konnte, aber mit Bedacht habe ich diese Beispiele aus den allerverschiedensten Wissens- und Lebensgebieten ausgewählt: aus Physik, Chemie, Biologie, Psychologie, Medizin,