Springer-Lehrbuch

Manfred Denker

Einführung in die Analysis dynamischer Systeme

Mit 48 Abbildungen

Springer

Manfred Denker
Universität Göttingen
Institut für Mathematische Stochastik
Maschmühlenweg 8–10
37073 Göttingen
Deutschland
e-mail: denker@math.uni-goettingen.de

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2000): 37-01

ISBN 3-540-20713-9 Springer Berlin Heidelberg New York

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media

springer.de

Printed in Germany

Satz: Reproduktionsfertige Vorlage vom Autor
Herstellung: LE-TEX Jelonek, Schmidt & Vöckler GbR, Leipzig
Einbandgestaltung: *design & production* GmbH, Heidelberg
Gedruckt auf säurefreiem Papier SPIN: 10976753 46/3142YL - 5 4 3 2 1 0

Vorwort

Dynamische Systeme sind faszinierend. Sie verbinden angewandte Themen mit anspruchsvollen mathematischen Theorien verschiedenster Ausrichtung und erlauben dem interessierten Studenten, Lehrer und Forscher, Einblicke in viele Teilgebiete der Mathematik zu gewinnen (etwa in die Zahlentheorie oder die Stochastik). Es gibt kaum ein Gebiet der Mathematik, das nicht seine speziellen, dynamisch ausgerichteten Spezialthemen besitzt. Die Natur kennt auf der anderen Seite Gesetzmäßigkeiten, die zeitlich als unveränderbar gelten und eine zeitlich veränderbare Bewegung (Entwicklung) steuern. Dies kann etwa in Form physikalischer Gesetze formuliert werden, jedoch werden in zunehmendem Maße auch andere Wissensgebiete mit einbezogen.
Letztlich ist es dieser Beweggrund, aus dem man sich mit Dynamik beschäftigt; der Leser wird aber nur recht spärliche Hinweise hierauf im Text vorfinden. In diesem Band soll vielmehr das Interesse über eine anspruchsvollere analytische Einführung in die Theorie das Interesse geweckt und eine Wissensgrundlage geschaffen werden, sich weiterhin mit diesem Thema beschäftigen zu können. Dabei unterstreicht die Vielzahl der verwendeten Methoden aus der Analysis die (mathematische) Faszination.
Die mathematische Theorie dynamischer Systeme hat ihren Ursprung zweifelsohne in der Himmelsmechanik. Jules Henri Poincaré hat in seiner Monographie „Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste“ wesentliche Grundlagen der Theorie gelegt. In ihr und weiteren Arbeiten finden sich fundamentale Begriffe wie Rekurrenz und sensitive Abhängigkeit vom Anfangszustand wieder, aber auch Sätze zu Fuchsschen Gruppen und zur Konjugation dynamischer Systeme.
Sicherlich haben auch Entwicklungen in der Theorie der Differentialgleichungen ihre Spuren hinterlassen. Das Buch „Dynamical Systems“ von Birkhoff gibt einen ersten Überblick. Zentrales Interessengebiet aus mathematischer Sicht bilden geodätische Flüsse, und nicht nur wegen ihrer Bedeutung in der Theorie Hamiltonscher Systeme. Sie haben letztlich durch die Arbeiten von E. Hopf und der russischen Schule um Anosov die hyperbolische Theorie geprägt.
Topologische Dynamik beschäftigt sich mit abstrakten topologischen Eigenschaften, etwa Rekurrenz, Minimalität u.ä. Sie hat sich heute zu einem eigenen Teilgebiet der Dynamik entwickelt. Von speziellem Interesse ist hier

die symbolische Dynamik, die sich mit total unzusammenhängenden Folgenräumen und Schiebungsdynamiken beschäftigt. In der Informatik gewinnt dieser Aspekt der Dynamik besondere Bedeutung. Das Buch „Topological Dynamics“ von Gottschalk und Hedlund kann als ein früher Versuch betrachtet werden, diese Theorie darzustellen.

Mit der Formulierung der Ergodenhypothese durch Boltzmann entstand das Problem, Zeit- und Raummittel zu verbinden. Dies gelang erst relativ spät durch Birkhoff und von Neumann. Ihre Arbeiten begründeten den Zweig der Dynamik, der sich mit messbaren Strukturen und nichtsingulären Abbildungen (Maßen) beschäftigt. Hopf's Buch „Ergodentheorie“ ist ein Klassiker zu diesem Thema.

Die modernen Anforderungen an die Theorie dynamischer Systeme beschränken sich seit langem nicht mehr auf physikalische Phänomene. Anwendungen in der Mathematik sind vielleicht noch bestens bekannt (etwa das Newton-Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen von Polynomen), dagegen solche aus der Biologie (etwa Populationsdynamiken) oder Wirtschaftswissenschaften (Zeitreihen) weniger. Dynamik als mathematische Theorie ist sicherlich ein Zweig der theoretisch orientierten Mathematik; man sollte jedoch nicht verkennen, dass dieses Gebiet gleichermaßen anwendungsbezogen ist. Typisch hierfür ist das Bestreben, geeignete Modelle zur Beschreibung der Realität zu finden, somit also eine Vielfalt an Modellen zu beschreiben und zu klassifizieren.

Diesem Buch liegt das Bestreben zugrunde, eine Einführung in die drei genannten Gebiete der Dynamik zu geben, wie sie in einer zweisemestrigen vierstündigen Vorlesung (28 Wochen) dargestellt werden kann. Dabei stehen die analytischen Methoden im Vordergrund. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass eine geometrisch geprägte Einführung in die Theorie dynamischer Systeme andere Schwerpunkte setzen muss, auch weitgehend andere Methoden und Beispiele benutzen wird. Zahlreiche Vorlesungen zu diesem Thema während der letzten drei Jahrzehnte standen Pate zu diesem Buch. Im ersten Teil der Literaturliste (Nr. 1–27) sind diejenigen Bücher aufgeführt, die im vorliegenden Text benutzt werden. Diese Liste mag auch als Anhalt dafür dienen, was der Leser an Voraussetzung mitbringen sollte, nämlich diese Literatur als Nebenlektüre zu benutzen. Dies wird etwa durch eine viersemestrige Analysisvorlesung erreicht.

Das Buch ist nach den oben beschriebenen Gebieten gegliedert. Kapitel Drei bis Fünf enthalten topologische und differenzierbare Dynamik sowie Ergodentheorie. Ich habe versucht, zu jedem Thema die wesentlichsten Grundlagen darzustellen, aber auch herausragende Sätze mit Beweisen zu formulieren. Das gelang jedoch nicht in allen wünschenswerten Fällen. Einige wichtige Sätze werden deshalb am Ende einzelner Abschnitte lediglich zitiert und kommentiert; im weiteren Verlauf der Darstellung werden sie nicht unbedingt benötigt. Die Beweise sind bewusst knapp gehalten, um in der Darstellung an moderne Forschungsgebiete heranzuführen. Aus demselben Grund wurde

auch darauf verzichtet, die grundlegende Theorie in ihrer vollen Breite zu entwickeln. Einer eher knappen, aber hoffentlich ausreichenden Darstellung der Grundlagen stehen etwa neunzig Beispiele und fünfzig Graphiken gegenüber, die helfen sollen, Begriffe und Fakten zu verdeutlichen. In dieser Hinsicht unterscheidet sich wohl das Buch von gängigen Vorstellungen eines Textbuches zu einer Vorlesung. Jedes Kapitel beginnt mit einer Orientierung über seinen Inhalt, die auch Ursprünge der Theorie ein wenig beschreibt.
Transformationen auf niedrig-dimensionalen Räumen sind zum Verständnis dynamischer Verhaltensweisen unabdingbar, insbesondere auch bei Simulationen mittels Computern. Kapitel Zwei enthält deshalb einen Überblick über grundlegende Klassen solcher Systeme (ausgenommen Diffeomorphismen auf Flächen). Sie bilden ein Grundgerüst zum Verständnis dynamischer Phänomene und dienen als Motivation und Veranschaulichung der allgemeinen Theorie in den folgenden Kapiteln.
Eine generelle Einführung in die Problemstellungen der Dynamik anhand ausgesuchter Themen findet der Leser in Kapitel Eins. Die sechs Abschnitte dieses Kapitels sind gleichwohl geeignet, in je einer Vorlesungsstunde ein interessantes Resultat der Dynamik zu besprechen.
Nun noch eine Bemerkung zu Kapitel Sechs, das sicherlich auch die Vorliebe des Autors wiederspiegelt. Der Begriff des thermodynamischen Formalismus ist durch die statistische Physik geprägt. Hier handelt es sich jedoch um ein Thema, das rein dynamisch verstanden werden sollte, vielerlei mathematische Anwendungen besitzt und in manch anderen Disziplinen zu bemerkenswerten Ergebnissen geführt hat.
Im Wesentlichen sind die ersten fünf Kapitel unabhängig voneinander lesbar. An einigen Stellen werden Resultate aus anderen Theorien zitiert (z.B. Funktionentheorie oder Differentialgeometrie), und es wird erwartet, dass der Leser diese bei Bedarf nachliest. Übungsaufgaben zu den sechs Kapiteln finden sich im Anhang. Viele dieser Aufgaben sollte der Leser durch Literaturstudium lösen; sie sind in der angegebenen Literatur über Dynamik zu finden. Der Leser wird auch bemerken, dass die Graphiken nicht professionell erstellt worden sind. Der Grund hierfür liegt darin, dass der Leser aufgefordert ist, jede der im Buch abgebildeten Graphiken selbst zu zeichnen oder zu programmieren. Natürlich sind etwa bei der Darstellung der Julia-Mengen in Abschnitt 2.4 Bilder bekannt, die eine größere Auflösung besitzen. Jedoch kann man dies nur mit großem Rechenaufwand und größerem Speicherplatz durchführen. Ich habe dagegen versucht mit möglichst wenig Aufwand aussagekräftige Bilder zu erhalten, die im Allgemeinen jedoch nicht ohne ein gewisses Verständnis der Materie reproduziert werden können.
Die Literaturliste verzichtet auf die Angabe von Originalarbeiten, dafür werden Bücher angegeben, die als Ergänzung studiert werden können, wie auch solche, die einzelne Themen dieses Buches in größerem Detail darstellen. Sie enthält ebenfalls im ersten Teil eine Auswahl von Büchern zu den Gebieten der Mathematik, aus denen Resultate in den Beweisen benutzt werden.

Die Literaturliste belegt eindrucksvoll, dass ich mich bei der Konzeption und der Ausgestaltung dieses Buches auf etliche ausgezeichnete Darstellungen von Kollegen stützen konnte. Ich hoffe aber trotzdem, Eigenständigkeit und Originalität in der Darstellung gewahrt zu haben. Ich möchte mich an dieser Stelle für vielfältige Unterstützung durch Kollegen und Studenten bedanken, die bewusst oder unbewusst durch ihre Kommentare wertvolle Hinweise gaben. Besonders nennen möchte ich Robert Kaufmann, Aimo Hinkkanen, Alica Miller, Feliks Przytycki, Shigehiro Ushiki, Yakov Pesin, Henk Bruin, Susanne Koch, Manuel Stadlbauer, Gerhard Keller, Ziggy Nitecki, Bernd O. Stratmann, Doris Fiebig, Gudrun Freitag, Michael Denker, Stefan-M. Heinemann und Hajo Holzmann. Auch haben vier ungenannte Referenten wertvolle Hinweise zur Verbesserung der Darstellung und der Konzeption des Bandes gegeben. Schließlich gilt mein Dank auch Ludwig Arnold, dessen Überzeugungskünste mich zu diesem Buch verleiteten.
Zum Schluss möchte ich die Institutionen erwähnen, bei denen ich als Gast auch an diesem Buch arbeiten konnte: das „Mathematics Department“ der Universität von Illinois in Urbana-Champaign, dem Banach Zentrum und der Akademie der Wissenschaften in Warschau, der polnischen Humboldt-Stiftung „Fundacja na Rzecz NAUKI Polskiej“ und der Universität Kyoto.
Vor allem aber habe ich dem Springer-Verlag für die Unterstützung bei diesem Projekt zu danken.

Göttingen im April 2004 *Manfred Denker*

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Variationen über dynamische Systeme

Ein Buch über dynamische Systeme beginnt oft mit einer Reihe motivierender Beispiele, die der Physik entnommen oder historisch begründet sind. Die allgemeine Wertschätzung dieses Konzeptes rührt sicherlich von seiner breiten Anwendbarkeit in wissenschaftlichen Disziplinen her, und nicht nur in der Physik. Einige wenige ausgewählte Beispiele im Anhang sollen einen Eindruck vermitteln.

Auf diese Weise soll die Theorie in diesem einführenden Kapitel jedoch nicht motiviert werden; die hier vorgestellten Beispiele sind mathematischer Natur und berühren einige Teilgebiete und Methoden der Mathematik. Konkrete Anwendungen und historische Bemerkungen sind in den zitierten Werken des Literaturverzeichnisses ausführlich enthalten. An dieser Stelle erscheint es daher sinnvoll, kurz in die Fragestellungen des ersten Kapitels einzuführen, ihren historischen Hintergrund aufzuzeigen und ihre Fortführung in den weiteren Abschnitten anzudeuten.

Die Wirkung einer Gruppe auf einer Menge bildet das Grundkonzept dynamischer Systeme, das am besten durch eine $\mathbb{Z}$-Operation erklärt wird, denn diese kann als iterativ angwendeter Algorithmus verstanden werden. In dieser Form stellen die Rotationen auf der S^1 eine wichtige Beispielklasse dar. Sie werden in den Abschnitten 2.3 und 4.4 bzgl. ihrer Konjugationseigenschaften näher betrachtet. Der Satz von Borel (1871–1956) als einer der ersten Ergodensätze (Gleichverteilungssätze) greift für diese Transformationen. Er kann als Korollar zum Birkhoffschen Ergodensatz aufgefasst werden, der im ersten Abschnitt im ergodischen Fall wegen seiner grundlegenden Bedeutung bewiesen wird. Weitere Ergodensätze werden in Abschnitt 5.2 besprochen.

Probleme der (analytischen) Zahlentheorie sind oftmals mit Dynamiken verbunden. Solche Probleme haben schon früh das Interesse der Mathematiker erweckt. Für die Kettenbruchentwicklung wurde bereits von Carl Friedrich Gauß um 1800 die Existenz eines invarianten Maßes nachgwiesen, und G. Boole (1815–1864) untersuchte die nach ihm benannte Abbildung um 1830. Der Abschnitt 1.6 beschreibt ein typisches Resultat der messbaren Dynamik anhand der Kettenbruchentwicklung, und und es wird der Zusammenhang mit hyperbolischer Geometrie und Fuchsschen Gruppen aufgezeigt. Beide Konzepte werden in den Abschnitten 4.7 und 5.6 fortgeführt, ohne dass auf dieses Beispiel oder auf seine Verallgemeinerungen Bezug genommen wird.

Neben Ergodensätzen ist der Nachweis absolut stetiger invarianter Maße ein Hauptproblem der Dynamik. Die in Abschnitt 1.6 vorgestellte Methode zur Konstruktion eines invarianten Maßes ist klassisch, modernere Methoden werden in Kapitel 5 vorgestellt.

Ein großer Teil der Theorie wird durch den Begriff der (dynamischen) Hyperbolizität geprägt. Am einprägsamsten wird er durch Torusautomorphismen dargestellt. Im Kapitel 4 spielt er die zentrale Rolle. Aber auch schon im ersten Kapitel wird seine Bedeutung durch den Satz von Grobman und Hartman (1962/3) unterstrichen. Obwohl dieser recht einfach aussehende Satz nur recht spät bewiesen werden konnte, gibt es für rationale Dynamiken beispielsweise Ergebnisse seit dem Ende des 19.Jahrhunderts in den Sätzen von Kœnigs (1858–1931) und anderen Autoren (s. Abschnit 2.4).

Dieser letztgenannte Satz ist eine typische Aussage über das lokale Verhalten dynamischer Systeme. Das Konzept der lokalen Konjugation ist von fundamentaler Bedeutung in der Dynamik, insbesondere auch für Flüsse in einer Umgebung eines kritischen Punktes. Das Verständnis der dynamischen Bedeutung der Eigenwerte der Ableitung ist ein grundlegendes Problem der differenzierbaren Dynamik. Verdeutlicht wird dies beispielsweise durch den Satz von Oseledets (1968) in Abschnitt 4.2.

Die Benutzung eines Fixpunktsatzes für Kontraktionen in vollständigen metrischen Räumen erweist sich für viele Resultate als wesentliches Hilfsmittel. Dieser elementare Satz bildet auch die Grundlage der fraktalen Geometrie selbstänlicher Mengen. Der nach Felix Hausdorff (1868–1942) benannte Dimensionsbegriff spielt eine zentrale Rolle, wie auch die fundamentalen Beispiele der nach Cantor (1845–1918) und nach Sierpiński (1882-1969) benannten Mengen. Sie sind auch Prototypen von sogenannten iterierten Funktionensystemen, die man als Halbgruppendyamiken verstehen kann. Die Theorie entstand eigentlich erst, nachdem durch Benoit Mandelbrot das Interesse um 1980 durch Computergraphiken geweckt worden war. In Abschnitt 1.2 wird eine Einführung in die Anfangsgründe dieser jungen Theorie gegeben.

Zwei weitere Typen von Dynamiken spielen eine bedeutsame Rolle: die symbolische Dynamik und die durch Vektorfelder erzeugte. Erstere gewinnt zunehmend an Bedeutung wegen ihrer formalen Struktur als Sprache (s. Abschnitt 2.2). Die Additionsmaschine mag hierfür als Beleg dienen. In der Dynamik hat die Kodierung mittels symbolischer Folgen schon seit Hadamard, G. Hedlund ($\sim$ 1905-1993) und M. Morse ihre Anwendungen. Mit der Konstruktion von Markoff-Zerlegungen und Erzeugersätzen um 1970 gewannen solche Kodierungen mittels Teilschifts besondere Bedeutung. Ihre dynamische Struktur ist kombinatorischer Natur und deshalb besonders für Beispiele und Gegenbeispiele geeignet. Daher spielen sie auch die zentrale Rolle in der topologischen Dynamik, die in Kaitel 3 entwickelt wird. Außer den Begriffen von Gruppenoperationen, der Expansion und der anziehenden und abstoßenden periodischen Punkte (Bahnen) findet man hierzu wenig im ersten Kapitel.

Differentialgleichungen stehen am Anfang der Entwicklung dynamischer Systeme, da diese Theorie aus der Astronomie entstand. Der Existenzsatz für Lösungen von einfachen Differentialgleichungen von Picard (1856–1941) ist ebenfalls im Wesentlichen eine Anwendung eines Kontraktionsprinzips. Das Normalformenproblem und das Bifurkationsverhalten ihrer Lösungen sind zentrale Probleme, die jedoch in diesem Band nicht über den Rahmen der Abschnitte 1.4 und 1.5 hinaus entwickelt werden können. Anhand des Feigenbaum Diagramms wird die Periodenverdoppelung erklärt. Eine kurze Diskussion der nach E. Hopf benannten Bifurkation schließt sich an. Allerdings werden Ideen über stabiles und unstabiles Verhalten periodischer Bahnen in Form von Störungstheorie in den Abschnitten 4.4 und 4.5 bedeutsam. Im weiteren Verlauf der Darstellung werden Flüsse in Kapitel 4 behandelt, und dies meist in Analogie zur Iterationstheorie von Diffeomorphismen.
Die Konjugation dynamischer Systeme ist der wichtigste Begriff und führt zum Klassifikationsproblem der Dynamik. Die Entwicklung dieses Konzeptes bleibt späteren Kapiteln vorbehalten, ebenso wie etwa das der Entropie, der Expansivität, der Attraktion, Rekurrenz und anderer mehr. Trotzdem dient dieses Kapitel der grundlegende Orientierung und bildet ein Fundament für das Verständnis der folgenden Kapitel.

1.1 Dynamische Systeme

Das einfachste dynamische System wird durch eine Selbstabbildung T einer Menge (Zustandsraum) Ω erklärt; jedoch beschreibt eine solch elementare Begriffsbildung nicht den Kern der Sache. Erst durch die Hinzunahme einer Zeitkoordinate erreicht man dynamisches Verhalten. So denkt man sich $\omega_1 = T(\omega)$ als denjenigen Zustand in Ω, der nach einer Zeiteinheit ausgehend von ω erreicht wird. Wiederholte Anwendung dieses Algorithmus erlaubt es vom Zustand ω_n zu sprechen, der den Zustand nach n Zeiteinheiten bezeichnet. Eine reelle Funktion alleine besitzt also keinen dynamischen Charakter; vielmehr erzeugt man erst eine Dynamik durch wiederholte Anwendung dieser Funktion.
Es kommt daher sehr darauf an, unter welchem Blickwinkel eine Selbstabbildung betrachtet wird. Aus Sicht der Dynamik interessiert man sich üblicherweise für eine Abbildung $T : \Omega \to \Omega$ zusammen mit allen Iterierten[1] $T^n : \Omega \to \Omega$. Dabei werden die Iterationsstufen als (zukünftige) zeitliche Entwicklung interpretiert. Ist T invertierbar, so bezeichnet T^{-1} die inverse Abbildung, und $T^{-n} = (T^{-1})^n$, $n \geq 0$, beschreibt die Vergangenheit. Eigenschaften der Gesamtheit aller Iterierten bilden den zentralen Untersuchungsgegenstand. Das umfasst beispielsweise Langzeitverhalten und Isomorphietheorie, schließt aber auch lokales Verhalten und andere Strukturaussagen

[1] Es bezeichnet stets $T^n = T \circ T^{n-1}$, $T^n(\omega) = T(T^{n-1}(\omega))$, die induktiv definierte n-te Iterierte von T $(n \geq 1)$ mit der Identität $T^0 = \mathrm{I}$.

ein. Es beschreibt also das Wesen der Theorie dynamischer Systeme besser, wenn in die Definition eines dynamischen Systems sogleich die von der Abbildung T erzeugte Halbgruppe (bzw. Gruppe) aufgenommen wird. Natürlich ist man dann nicht auf eine einzige Abbildung beschränkt.
Betrachtet man die Funktion $T : S^1 \to S^1$ der Einheitskreislinie S^1 in sich, die als *Rotation*

$$T(z) = e^{2\pi i\alpha} z \qquad z \in S^1$$

mit festem Winkel $0 \leq \alpha < 1$ definiert ist, so errechnen sich die Iterierten T^n sofort zu $T^n(z) = e^{2\pi i n\alpha} z$ $(n \in \mathbb{Z})$. Fixiert man $z \in S^1$, so bilden die Punkte $z_n = T^n(z)$ $(n \in \mathbb{Z})$ eine höchstens abzählbare Teilmenge, die, je nachdem ob $\alpha \in \mathbb{Q}$ rational oder $\alpha \notin \mathbb{Q}$ irrational ist, eine endliche oder dichte Teilmenge von S^1 darstellt (s. Beispiel 1 weiter unten). Dabei kann z_n auch als Bild von z_m unter der Abbildung T^{n-m} erhalten werden. Diese Beobachtung lässt sich anders ausdrücken: Die Gruppe $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen operiert (wirkt) auf S^1 vermöge dieser Abbildungen T^n, $(z, n) \to T^n(z)$. Man interessiert sich für die Eigenschaften dieser Gruppenwirkung $S^1 \times \mathbb{Z} \to S^1$. Im dem Fall, wenn α rational ist und eine Darstellung $\alpha = \frac{m}{n}$ mit teilerfremden $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ besitzt, ist $T^j \neq \mathrm{I}$ für $1 \leq j < n$ und $T^n = \mathrm{I}$. In diesem Fall operiert die Gruppe $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{\mathrm{mod}\, n}$ auf der Kreislinie.
Ein dynamisches System ist also eine Halbgruppenwirkung, genauer:

Definition 1. *Seien G eine Halbgruppe mit Eins und Ω eine nichtleere Menge. Das Paar (Ω, G) heißt ein dynamisches System, wenn es eine assoziative Abbildung*

$$\begin{aligned} \Omega \times G &\to \Omega \\ (\omega, g) &\to g\omega \end{aligned}$$

gibt, und die Einheit $e \in G$ als Identität operiert; also gelten die beiden Eigenschaften

$$(g\omega, h) \mapsto h(g\omega) = (hg)\omega \quad \textit{und} \quad e\omega = \omega.$$

Insbesondere schließt diese Definition auch den Fall einer Gruppenwirkung (Gruppenoperation) ein, wenn G also eine Gruppe ist. G operiert hier von links. Eine analoge Definition für Rechtsoperationen wird in Abschnitt 3.1 angegeben. Man beachte, dass dann g von rechts mit h multipliziert wird. Wird die Halbgruppe (bzw. Gruppe) von einer einzigen Abbildung (Transformation)

$$T : \Omega \to \Omega$$

erzeugt, so schreibt man in einfacher Weise (Ω, T). Man sollte jedoch stets beachten, dass damit die (Halb-) Gruppenwirkung gemeint ist, je nachdem ob T nicht invertierbar oder invertierbar ist. Aus der Definition folgt ferner unmittelbar, dass die einzelnen Abbildungen genau dann invertierbar sind,

wenn G eine Gruppe bildet. Man spricht dann von einem *invertierbaren dynamischen System.*
Das Verhalten der Halbgruppenwirkung wird wesentlich durch die Bahnstrukturen des dynamischen Systems ausgedrückt.[2]

Definition 2. *Ist* (Ω, G) *ein dynamisches System, so bezeichnet* $\mathcal{O}(\omega) = G\omega$ *die Bahn von* $\omega \in \Omega$*. Ist* $G = \mathbb{Z}$ *(bzw.* $G = \mathbb{R}$*), so heißt* $\mathcal{O}^+(\omega) = \mathbb{N}_0\omega$ *(bzw.* $= \mathbb{R}_+\omega$*) die Vorwärtsbahn, und* $\mathcal{O}^-(\omega) = \{\eta \in \Omega : \omega \in \mathcal{O}^+(\eta)\}$ *die Rückwärtsbahn von* $\omega \in \Omega$*.*

Für praktische Zwecke erweist es sich als ratsam, zusätzliche Strukturen für die Wirkung zu fordern. Ist Ω ein topologischer Raum und G eine topologische Gruppe (bzw. Halbgruppe), so spricht man von einem *stetigen* dynamischen System, falls die Wirkung $\Omega \times G \to \Omega$ stetig ist (hier wird $\Omega \times G$ mit der Produkttopologie versehen). Ist ferner Ω eine Mannigfaltigkeit, und operiert G durch differenzierbare Abbildungen, so spricht man von einem *differenzierbaren* dynamischen System. Eine zweite grundlegende Klasse dynamischer Systeme wird durch messbare Strukturen erklärt. Sind Ω und G mit einer solchen Struktur versehen, gegeben durch σ-Algebren (auf G und Ω) und ein Maß auf Ω, so heißt die Wirkung ein *maßtheoretisches* dynamisches System, falls die Wirkung $\Omega \times G \to \Omega$ messbar ist (bzgl. der Produkt-σ-Algebra). Ist G durch eine einzige Abbildung gegeben, so schreibt man $(\Omega, \mathcal{B}, T, m)$, wobei $\mathcal{B}$ die σ-Algebra auf Ω und m das Maß auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{B})$ bezeichnen. In späteren Kapiteln werden weitere Spezialisierungen der Begriffsbildung eingeführt. Für den Augenblick genügt diese Unterscheidung vollkommen.
Dynamische Systeme bilden eines der wichtigsten mathematischen Hilfsmittel zur Modellierung von zeitlichen Abläufen in allen Bereichen des „täglichen Lebens“. Vom mathematischen Standpunkt aus ist es aber wesentlich wichtiger, grundlegende Typen dynamischen Verhaltens exemplarisch und in einfacher Form darzustellen. Die soeben eingeführte Begriffsbildung und die in diesem Band dargebotene Theorie werden am besten durch eine Reihe fundamentaler Beispiele illustriert.

Beispiel 1. Irrationale Rotation. Es sei $\Omega = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ die Einheitskreislinie, und $\alpha \in \mathbb{R}$. Durch $T(z) = e^{2\pi i\alpha}z$ wird ein C^∞-Diffeomorphismus[3] definiert, also ein differenzierbares dynamisches System erklärt. Geometrisch bedeutet dies, dass der Punkt z um den Winkel $2\pi\alpha$, $\alpha \in [0, 1)$, gedreht wird; insbesondere bleibt die Bogenlänge zwischen zwei Punkten erhalten. Man spricht in diesem Fall von einer *Isometrie*. n-malige Iteration liefert eine Drehung um den Winkel $2\pi n\alpha$. Man überlegt sich leicht, dass $T^n(z) = z$ nur dann gelten kann, wenn $n\alpha = 0 \bmod 1$ gilt, also α rational ist. Ist α irrational, so besitzt jeder Punkt eine dichte Bahn; denn ist

[2] Es bezeichne $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$
[3] d.h. T und T^{-1} sind unendlich oft differenzierbar

dies nicht der Fall, so zerfällt das Komplement des Bahnabschlusses $\overline{\mathcal{O}(\omega)}$ in eine endliche oder abzählbare Vereinigung disjunkter Kreisbögen, die eine unter T invariante Familie bilden. Da die Abbildung längentreu ist, gibt es nur endlich viele Kreisbögen einer festen Länge, die ineinander überführt werden. Eine Iterierte von T lässt dann aber einen Kreisbogen invariant, der einen Fixpunkt enthalten muss. Nach dem zuvor Gesagtem ist das aber nur möglich, wenn α rational ist. Alternativ kann man so argumentieren: Ist n so gewählt, dass z im kleineren Intervall zwischen $T^n(z)$ und $T^{n+1}(z)$ liegt, so ist eine dieser beiden Abbildungen eine Rotation mit kleinerem Drehwinkel als $\alpha/2$. Die Iterierten dieser Abbildung nähern sich also jedem Punkt der S^1 bis auf $\alpha/2$. Wiederholt man dieses Argument, so liegt folglich die Bahn $\mathcal{O}(z) = \{T^n(z) : n \in \mathbb{Z}\}$ dicht in S^1. In der Tat zeigt dieses Argument (vgl. Definition 19, Abschnitt 2.3), dass $\mathbb{Z}$ gleichgradig stetig und minimal operiert.

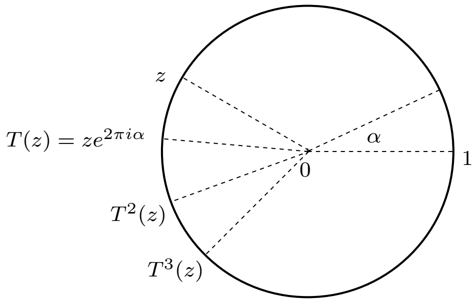

Abb. 1.1. Rotation der S^1

Beispiel 2. Endomorphismen der S^1. Es sei wiederum $\Omega = S^1$ und $T : S^1 \to S^1$ eine (nicht invertierbare) stetige und surjektive Abbildung. Beispielsweise kann T in der Form $T(e^{2\pi it}) = e^{2\pi if(t)}$ geschrieben werden, wobei f eine stetige, surjektive Abbildung des Einheitsintervalls in sich darstellt. Da T nicht invertierbar zu sein braucht, ist auch f selbst im Allgemeinen keine Bijektion. Nach dem Zwischenwertsatz besitzt f einen Fixpunkt p, also besitzt T den Fixpunkt $\exp[2\pi ip]$. Rotationen sind nicht in dieser Art darstellbar, sondern nur mittels einer Überlagerungsabbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definition 3. *Ein Punkt $\omega \in \Omega$ heißt periodisch, falls seine Bahn endlich ist. Die Mächtigkeit seiner Bahn wird als Periode bezeichnet. Er wird Fixpunkt genannt, falls er die Periode* 1 *besitzt.*

Die Abbildung $T(z) = z^m$ $(m \geq 2)$ ist nicht invertierbar und auch keine Isometrie. Es gilt $T(e^{2\pi it}) = e^{2\pi imt}$, und man folgert direkt, dass T die Bogenlänge um den Faktor m streckt (lokal betrachtet). Abbildungen dieses Typs heißen *expandierend*.

Beispiel 3. Stückweise monotone Abbildungen. (vgl. Abschnitt 2.1) Es sei nun $\Omega = I = [0,1]$ das Einheitsintervall und $T : I \to I$ eine stückweise stetige und monotone Funktion. Das bedeutet: Es gibt endlich viele Punkte $0 = p_1 < p_2 < ... < p_{s+1} = 1$, so dass $T_{|(p_i,p_{i+1})}$ $(i = 1, ..., s)$ stetig und monoton ist. Besonders interessante Beispiele sind
a. *β-Transformation*: $T(x) = \beta x \bmod 1$, $\beta > 0$, mit $p_j = (j-1)\beta^{-1}$.
b. *Intervallvertauschung*: (s. Abbildung 2.1) Sei $0 = p_1 < p_2 < ... < p_{s+1} = 1$ eine Zerlegung des (rechts offenen) Einheitsintervalls. Sei π eine fest gewählte Permutation von $\{1, 2, ..., s\}$. Die zugehörige Intervallvertauschung T_π bildet das Intervall $[p_{\pi(1)}, p_{\pi(1)+1})$ linear und ordnungstreu auf das Intervall $[0, p_{\pi(1)+1} - p_{\pi(1)})$ ab, und sukzessiv das Intervall $[p_{\pi(2)}, p_{\pi(2)+1})$ linear und ordnungstreu auf das Intervall $[p_{\pi(1)+1} - p_{\pi(1)}, p_{\pi(1)+1} - p_{\pi(1)} + p_{\pi(2)+1} - p_{\pi(2)})$ usw. Die Intervalle werden also gemäß der Permutation π vertauscht angeordnet. Formal definiert man die Punkte $0 = q_1 < q_2 < ... < q_{s+1} = 1$ durch $q_i = \sum_{j=1}^{i-1} p_{\pi(j)+1} - p_{\pi(j)}$ $(i = 2, ..., s)$ und definiert

$$T_\pi(x) = \sum_{i=1}^{s} \mathbf{1}_{[p_{\pi(i)}, p_{\pi(i)+1})}(x)[x + q_i - p_{\pi(i)}] \qquad x \in I.$$

T_π ist invertierbar, da die Intervalle mit Endpunkten $T_\pi(p_i)$ und $T_\pi(p_{i+1})$ paarweise disjunkt sind und das Intervall $[0, 1)$ überdecken.
In die Kategorie der Intervallabbildungen kann man auch die *Kettenbruchentwicklung* einordnen (vgl. Abschnitt 1.6). Hier werden abzählbar viele Intervalle benötigt: Es ist

$$T(x) = \left\{\frac{1}{x}\right\} \quad (x \in I) \qquad T(0) = 0.$$

Dabei bezeichnet $\{t\}$ den gebrochenen Teil der Zahl t. T bildet die Intervalle $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ monoton auf $(0, 1)$ ab. Diese Eigenschaft bezeichnet man als *Markoffsch*. Intervallvertauschungen besitzen diese Eigenschaft im Allgemeinen nicht. Die β-Transformation ist nur Markoffsch, wenn β eine ganze Zahl ist. In diesem Fall ist die Zerlegung in Intervalle endlich, auf denen T monoton und Markoffsch ist. Die β-Transformation ist *stückweise expandierend*, d.h. $T'(x) \geq \Lambda$ für ein $\Lambda > 1$ und für alle $x \in (p_i, p_{i+1})$. Das gilt nicht für die Kettenbruchentwicklung, jedoch besitzt eine Iterierte diese Eigenschaft. Während für die β-Transformation mit ganzzahligem β das Lebesguemaß *invariant* ist, hat die Kettenbruchentwicklung eine *invariante Dichte*, nämlich $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Hierunter versteht man, dass

$$\int \mathbf{1}_{T^{-1}[a,b]}(x) f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (0 \leq a < b \leq 1).$$

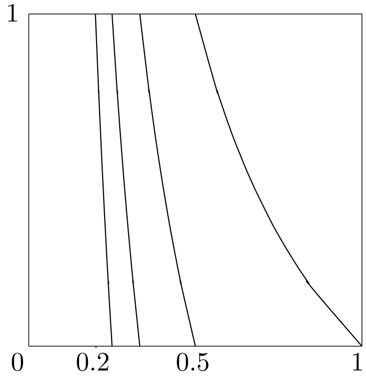

Abb. 1.2. Kettenbruchentwicklung

Beispiel 4. Rationale Abbildung der S^2 (s. Abschnitt 2.4). Eine rationale Abbildung T ist ein analytischer Endomorphismus der Sphäre S^2 und ist holomorph. (Man identifiziert S^2 mit der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ zusammen mit dem unendlich fernen Punkt ∞. Die holomorphen Karten werden wie üblich durch $\mathbb{C}$, bzw. die Kartenabbildung $z \mapsto z^{-1}$ definiert.) Beispielsweise ist $T(z) = z^2$ schon als Endomorphismus der S^1 diskutiert worden. Die Ableitung $T'(z) = 2z$ verschwindet im Nullpunkt, der auch ein Fixpunkt neben 1 und ∞ ist. Für $|z| < 1$ konvergiert die Bahn von z gegen 0 und für $|z| > 1$ gegen ∞. Es gibt also zwei *Attraktoren* (anziehende Mengen), nämlich $\{0\}$ und $\{\infty\}$, und einen *Repeller* (abstoßende Menge), die S^1. Im allgemeinen Fall einer expandierenden rationalen Funktion ist die Situation ähnlich.

Beispiel 5. Torusautomorphismen. Es sei $\Omega = \mathbb{T}^d$ der d-dimensionale Torus, der durch $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ definiert wird, wobei gegenüberliegende Seiten identifiziert werden. Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, die $\mathbb{Z}^d$ invariant lässt, definiert durch

$$T(z) = A(z) \qquad \bmod \mathbb{Z}^d$$

eine Transformation auf $\mathbb{T}^d$. Sie ist genau dann invertierbar, wenn die Determinate von A vom Betrag Eins ist. Die Ableitung von T ist natürlich durch A gegeben, also diktiert A das lokale Verhalten von T. Betrachtet man z.B. die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

so errechnen sich die Eigenwerte zu $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ und $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ mit Eigenvektoren $\mathbf{x_1} = (\sqrt{2}, 1)$ und $\mathbf{x_2} = (\sqrt{2}, -1)$. In Richtung von $\mathbf{x_1}$ wirkt die Dynamik abstoßend und in Richtung $\mathbf{x_2}$ anziehend, d.h. $A^{(-1)^i n}\mathbf{x_i} \to \mathbf{0}$ mit $n \to \infty$, $i = 1, 2$. Dieses Verhalten bezeichnet man allgemein als *hyperbolisch.* Die Untermannigfaltigkeiten $W^u(0) = \{t\mathbf{x_1} \bmod \mathbb{Z}^2 : t \in \mathbb{R}\}$ und $W^s(0) = \{t\mathbf{x_2} \bmod \mathbb{Z}^2 : t \in \mathbb{R}\}$ heißen die *unstabile* und *stabile Mannig-*

faltigkeit im Fixpunkt 0. Der Punkt x in der Abbildung 1.3 liegt im Durchschnitt der stabilen und unstabilen Mannigfaltigkeiten des Fixpunktes 0. Solche Punkte heißen *homoklinisch*. Die beiden Mannigfaltigkeiten sind lokal Untermannigfaltigkeiten und schneiden sich transversal (nicht tangential). Man spricht daher von einem transversalen homoklinischen Punkt.

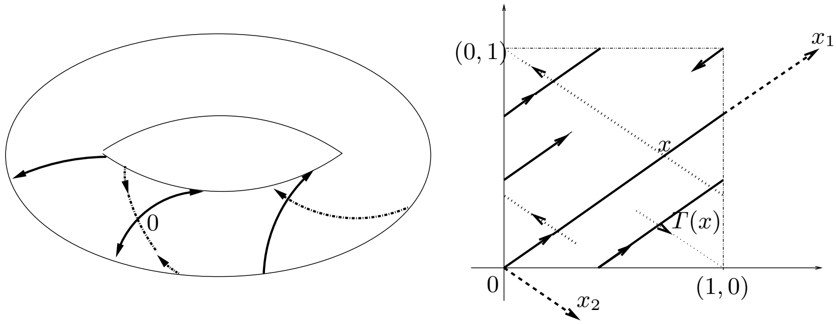

Abb. 1.3. Torusabbildung

Beispiel 6. Sind G eine Gruppe und H eine Untergruppe, so operiert H auf G vermöge

$$(g, h) \mapsto gh \qquad (g \in G, h \in H).$$

Beispielsweise operieren die orthogonalen $d \times d$-Matrizen auf dem Raum aller $d \times d$-Matrizen durch Matrixmultiplikation. Sind speziell G eine lokalkompakte Gruppe und $a \in G$ ein fest gewähltes Gruppenelement (also $H = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$), so definiert $T(x) = xa$ eine invertierbare Abbildung $T : G \to G$, die das (rechte) Haar-Maß invariant lässt.
Eine affine Abbildung $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $T(x) = A(x) + b$, ist invertierbar, sofern die lineare Abbildung invertierbar ist, und ihre Inverse ist wiederum affin. Ferner ist die Hintereinanderschaltung zweier affiner Abbildungen ebenfalls von diesem Typ. Daher bilden die invertierbaren affinen Abbildungen eine Gruppe, die auf $\mathbb{R}^d$ operiert.

Beispiel 7. Symbolische dynamische Systeme. Eine endliche Menge X erzeugt eine Vielzahl von dynamischen Systemen in der folgenden Weise. Die Menge

$$\Omega_X = X^{\mathbb{Z}} = \{\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} : x_n \in X \ \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

wird ein topologischer Raum mit der Produkttopologie (diskrete Topologie auf X), und $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-|k|} \mathbf{1}_{X \setminus \{x_k\}}(y_k)$ ($\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \mathbf{y} = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Omega_X$) definiert eine die Topologie erzeugende Metrik. Die Schiebung

$$T_X((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}},$$

definiert durch $y_n = x_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z})$, ist ein Homöomorphismus, und jede unter T_X invariante Teilmenge $\Omega \subset X^{\mathbb{Z}}$ definiert ein stetiges dynamisches System (Ω, T). Dabei ist T die Einschränkung von T_X auf Ω. Die stabile Mannigfaltigkeit in $\mathbf{x} \in \mathbf{\Omega}$ ist durch

$$W^s(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \Omega : \lim_{n\to\infty} d(T^n(\mathbf{x}), T^n(\mathbf{y})) = 0\}$$

definiert. Die Punkte $\mathbf{y}$ dieser Menge werden dadurch charakterisiert, dass die Koordinaten von $\mathbf{y}$ schließlich, für $n \to \infty$, mit denen von $\mathbf{x}$ übereinstimmen müssen. Vertauscht man T mit T^{-1}, so erhält man die unstabile Mannigfaltigkeit.

Beispiel 8. Sei $\Omega = \Omega^+_{\{0,1\}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Als *Additionsmaschine* wird die Transformation $T : \Omega \to \Omega$ bezeichnet, die durch

$$T((1,1,1,...,1,0,x_{n+1},...)) = (0,0,0,...,0,1,x_{n+1},...)$$

definiert wird. Für $n \geq 1$ gilt die Identität

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}(T^n(0))_k = n.$$

In der Tat ist für $n = 1$ $T(0) = (1,0,0,...)$ und daher $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}(T(0))_k = 1$. Ist dann die Behauptung für n erfüllt, und $T^n(0) = (1,...,1,0,x_{m+1},...)$, so gelten $T^{n+1}(0) = (0,...,0,1,x_{m+1},...)$ und $\sum_{k=0}^{m-2} 2^k = 2^{m-1} - 1$. Es folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}(T^{n+1}(0))_k &= 2^{m-1} + \sum_{k=m}^{\infty} 2^{k-1}(T^{n+1}(0))_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}(T^n(0))_k + 1 = n+1.\end{aligned}$$

Ω wird durch die Verknüpfung $x + y$, definiert durch seine Koordinaten $(x+y)_n = x_n + y_n + u_n$ mit $u_1 = 0$ und $u_{n+1} = 1_{[2,\infty)}(x_n + y_n + u_n)$, zu einer kompakten topologischen Gruppe, der sog. Gruppe der dyadischen natürlichen Zahlen.

Ein fundamentales Resultat der Dynamik ist der Birkhoffsche Ergodensatz, der an dieser Stelle in einer einfachen Form bewiesen werden soll.

Definition 4. *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, T, m)$ ein maßtheoretisches dynamisches System. Eine Teilmenge $A \in \mathcal{B}$ heißt T-invariant, falls $T^{-1}(A) = A$ f.ü. gilt. Das Maß m heißt invariant, falls $m(A) = m(T^{-1}(A))$ für jedes $A \in \mathcal{B}$ gilt, und es wird ergodisch genannt, falls jede invariante Menge das Maß Null oder Eins besitzt.*